突出数学思想观点下的教学方法
---- 以线性空间的同构为例

厦门大学　林亚南

教学方法的最基本要求:

把握重点,

处理难点,

解决疑点。

以学科的基本思想方法为纲要，统领对教学内容的认识，对教材的理解，从而指导教学活动，找准重点，化解难点，澄清疑点，将自己的备课心得体会告诉学生，这对于提高课程质量，提高学生的学科素质，是很有必要的。

代数学是研究一个代数对象的结构理论与表示理论的一门学科。线性空间则是本科生所接触，所学习的第一个代数结构。

《高等代数》课程中体现的代数研究基本思想方法主要有：（1）空间的直和分解方法；（2）同构方法；（3）等价分类方法。

一．对线性空间同构的理解和思考

1．线性空间的同构是刻画两个线性空间具有相同的代数结构的概念。

根据定义，线性空间的同构是保持元素之间一一对应且保持线性运算的映射。线性空间的同构就是保持空间的线性运算导出的所有性质和结构。

研究线性空间的第一个层次是研究向量之间的线性关系，内容包括线性组合，线性表示，线性相关性，线性无关极大组，基与维数等。第二个层次研究线性子空间，内容包括子空间与子空间的运算（交与和），生成子空间，直和分解。第三个层次研究线性空间之间的关系，内容包括线性映射，线性变换。

2．线性空间同构关系是等价分类思想方法的一个特例。

两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相等，所以维数是同构关系的全系不变量。任意数域上维线性空间都同构与上维列向量空间同构，所以数域上n维列向量空间是n维线性空间同构类的代表元。

3. 《高等代数》课程中研究线性空间同构的内容是多层次的。

$$V \cong F^n$$

$$\mathrm{Hom}_F(V,U) \cong F^{m\times n}$$

$V \cong F^n$ 和 $\mathrm{Hom}_F(V,V) \cong F^{n\times n}$ 的拓广

二．对线性空间同构内容的教学实践

总设讨论的线性空间是有限维的。

1．引进概念。

一一映射等价于可逆映射。

设$\varphi: V \to U$是一一映射，φ是单的指的是若 $\alpha \neq \beta$ ，则$\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$。$\varphi$是满的指的是对于任意的$\gamma \in U$，存在 $\alpha \in V$使得$\varphi(\alpha) = \gamma$。

φ是一一的，指的是对于任意的 $\gamma \in U$ ，存在唯一 $\alpha \in V$ 的使得 $\varphi(\alpha) = \gamma$。

例1：

（1）全体正实数R^+在加法定义为$a \oplus b = ab$，数乘定义为$k \circ a = a^k$，是否构成实数域R上线性空间？

（2）这个空间的维数是多少？

（3）$log_a : R^+ \to R$，$x \to log_a x$ 导出了从R^+到R的一一映射，这个映射是不是线性空间同构？

（4）求R^+从R到的线性空间同构φ，满足$\varphi : 2 \to 3$？

（5）从R^+到R的线性空间同构是不是都是形如（3）的形式？

2．关于 $V \cong F^n$。

注意到导出同构的对应关系实际上就是向量对应到坐标，取定一组基是建立对应得前提。取不同基，则向量对应得坐标不同，需要掌握坐标的转换原则。

例2：在 $F^{2\times 2}$中，$\alpha_1=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix}$，

$\alpha_4=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}$，求由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$生成子空间的维数和一个基，并扩充为$F^{2\times 2}$的一个基。

例3：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$V$的向量，满足

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A_{n\times m}$$

设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性无关性与 A 的列向量的线性相关性相同。

3．关于 $\mathrm{Hom}_F(V,U)\cong F^{m\times n}$。

首先考查一一对应。设φ是线性空间V到空间U的一个线性映射，取定V的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$U$的一组基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，则

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A_{m\times n} \quad （式1）$$

其中矩阵A是$m\times n$矩阵。

$$\begin{cases}\varphi(\alpha_1)=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{m1}\beta_m \\ \varphi(\alpha_2)=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{m2}\beta_m \\ \cdots \\ \varphi(\alpha_n)=a_{1n}\beta_1+a_{2n}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_m\end{cases} \quad （式2）$$

由此定义$\mathrm{Hom}_F(V,U)$到$F^{m\times n}$的映射：

$$\theta:\mathrm{Hom}_F(V,U)\to F^{m\times n},\ \varphi\mapsto\ A。$$

引理： 设 φ,ψ是 n维线性空间 V到 m维线性空间U上线性映射，取定V的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

（1）若对任意的i，都有$\varphi(\alpha_i)=\psi(\alpha_i)$，则$\varphi=\psi$。

（2）对于U中的任意一组向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，存在线性映射$\varphi$ 使得 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i$ 。

再证明θ保持线性运算，即证明

$$(\varphi+\psi)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)(A+B)$$

$$(\lambda\varphi)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)(\lambda A)$$

对于特殊情况，设 φ 是线性空间 V 的一个线性变换，取定 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A_{n\times n}$$

这时映射 θ 保持乘法运算，即

$$(\varphi\psi)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AB\text{。}\qquad\text{（式3）}$$

$\mathrm{Hom}_F(V,V)\cong F^{n\times n}$ 是环同构，代数同构。

有些教材将（式1）表为
$$\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

这样，设 $\psi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$，则导出
$$\psi\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\psi(A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix})=AB\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

所以 θ 不是代数同构，而是反同构。

线性空间与线性变换是几何结论，矩阵是代数的方法。同构架起了代数与几何的桥梁，可以将矩阵的命题与线性映射（线性变换）的命题互相转换。这种转换的推导将使学生打开眼界，这种转换得掌握将使学生增强学习兴趣。适当讲解这种转换内容，对于提高学生的代数素质是有好处的。

例4（1）设 φ 是 n 维空间 V 的线性变换，求证

$\varphi=\psi\eta$，其中 ψ 是同构映射，$\eta^2=\eta$。

（2）设 A 是 n 阶矩阵，求证

$A=BC$， 其中 B 是可逆矩阵，$C^2=C$。

对于不同的基的选取，同一个线性映射对应得矩阵是相抵的，同一个线性变换对应得矩阵是相似的。

相抵的矩阵是同一个线性映射在两组不同基下的矩阵，相似的矩阵是同一个线性变换在不同基下的矩阵。

例5（1）设φ是n维空间V到m维空间U的线性映射，则存在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$U$的基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，使得

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

（2）$\mathrm{Im}\,\varphi=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)$，$\mathrm{Ker}\varphi=L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_{\mathrm{n}})$，所以$\dim\mathrm{Im}\,\varphi+\dim\mathrm{Ker}\varphi=n$。

4. 关于 $V \cong F^n$ 和 $\mathrm{Hom}_F(V,V) \cong F^{n\times n}$ 的拓广。

$\alpha \leftrightarrow X,$

$\varphi(\alpha) \leftrightarrow AX,$

$\mathrm{Ker}(\varphi) \leftrightarrow AX = 0$ 的解空间，

$\mathrm{Im}(\varphi) \leftrightarrow A$ 的列空间，

$\dim\ker(\varphi) \leftrightarrow n -$ 秩$(A),$

$\dim\mathrm{Im}(\varphi) \leftrightarrow$ 秩(A)。

$\varphi \leftrightarrow A,$

φ单 $\Leftrightarrow$ A列满秩，

φ满 $\Leftrightarrow$ A行满秩，

φ同构 $\Leftrightarrow$ A可逆方阵。

实际上 V作为$\mathrm{Hom}_F(V,V)$上的模与F^n作为$F^{n\times n}$上的模同构。

定理：在（式1）的条件下，另设 $\eta_1 : V \cong F^n$，$\eta_2 : U \cong F^m$，设 $\mathcal{A} : F^n \to F^m$是由 $X \mapsto AX$ 决定的线性映射，则有

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_1"] & U \arrow[d, "\eta_2"] \\
F^n \arrow[r, "\mathcal{A}"] & F^m
\end{tikzcd}
$$

（1）$\eta_2 \varphi = A\eta_1$；

（2）$\eta_2(\mathrm{Im}\,\varphi) = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$；

（3）$\eta_1(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$。

条件如上，设 W是 U的子空间，则

$\eta_1(\varphi^{-1}(W)) = \mathcal{A}^{-1}(\eta_2(W))$，即下图可交换。

$$
\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}(W) \arrow[d] & W \arrow[l] \arrow[dd, "\eta_2"] \\
\eta_1(\varphi^{-1}(W)) \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{A}^{-1}(\eta_2(W)) & \eta_2(W) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

例6：设φ是n维空间V到m维空间U的线性映射

（1）求证：存在l维线性空间W，满的线性映射 $\eta:V\to W$，单的线性映射$\psi:W\to U$，使得$\varphi=\psi\eta$。

（2）（1）中的分解唯一否？设δ是W的可逆映射，则 $\varphi=(\psi\delta)(\delta^{-1}\eta)$。

（3）中分解在同构意义下唯一。即设 $\varphi=\psi\eta=\psi_1\eta_1$，其中 η,η_1是满的，ψ,ψ_1是单的，则存在同构映射 $\delta:W\to W_1$，使得$\psi=\psi_1\delta,\delta\eta=\eta_1$。

例7：设 $A \in F^{m\times n}$，秩$(A)=r$,

（1）存在 $B\in F^{m\times r}$，$C\in F^{r\times n}$，且秩$(B)=$秩$(C)=r$，使得 $A=BC$ 。

（2）（1）的分解在同构意义下唯一，即 $A=BC=B_1C_1$，其中$B,B_1\in F^{m\times r}, C,C_1\in F^{r\times n}$且秩$(B)=$秩$(B_1)=$秩$(C)=$秩$(C_1)$，则存在可逆矩阵 P，使得$B=B_1P, C=P^{-1}C_1$。

例8：设$\varphi: V \to U, \psi: V \to W$是线性映射，

（1）求证：存在$\sigma: U \to W$，使得 $\psi = \sigma\varphi$ 的充分必要条件是$\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\psi$。

（2）什么条件下，σ是唯一确定的？

在突出学科的基本思想方法的观点下，可以提升对教学内容的认识，加深对教材的理解，从而改善教学方法，准确地把握重点，化解难点，有效地澄清疑点。同时可以“胸中有数”地针对学生情况讲授核心内容，而将一些延伸的内容安排为攻关性的难题求解，探索性的专题讨论，总结性的专题报告。一方面，有效地提高课堂讲授质量。另一方面，刺激学生的学习热情，提高学生的数学学科素质。

等代数::厦门大学精品课程 - Microsoft Internet Explorer

(F) 编辑(E) 查看(V) 收藏(A) 工具(T) 帮助(H)

后退 搜索 收藏夹

http://gdjpkc.xmu.edu.cn/ 转到 链接

高等代数

福建省精品课程2003

厦门大学精品课程2003

|课程简介| |申请表格| |教学大纲| |课程信息| |教师队伍| |电子课件| |课程教案| |参考书目| |教学论坛| |应用背景|

|方法选讲| |高代实验| |课程试卷| |基础训练| |考研题选| |教学录像| |效果评价| |师生交流| |教学研讨会| |题征答|

友情链接

- 厦门大学
- 厦门大学数学科学学院
- 厦门大学精品课程网
- 清华大学精品课程网
- 北京师范大学精品课程网
- 国家精品课程:北京大学高等代数
- 国家精品课程:中国科技大学线性代数
- 国家精品… 子科技大学线… 与空间解析几…
- 国家精品… 林大学高等代…
- 国家精品… 北工学院线性…
- 国家精品… 开大学高等代… 析几何
- 莆田学院高等代数精品课程

课程简介

课程简介

《高等代数》®是数学学科的一门传统课程。在当今世界的数学内部学科趋于统一性和数学在其他学科的广泛应用性的今天，《高等代数》以其追求内容结构的清晰刻画和作为数学应用的基础，是大学数学各个专业的主干基础课程。它是数学在其它学科应用的必需基础课程，又是数学修养的核心课程。

代数学是厦门大学数学科学学院的重要研究方向之一，代数学研究群体和研究成果在国内有一定的影响。《高等代数》课程教学组已经形成一个学术造诣较高，结构合理，人员稳定，教学水平高，教学效果好的教师队伍。讲课教师都是具有博士学位具有高级职称的中青年教师。课程教学组坚持教学与科研互相结合，互相促进的原则，讲课教师从事代数学或数值代数方向的研究。

网址：gdjpkc.xmu.edu.cn

IP地址：５９.７７.１.１１６

谢谢！

2009年5月 福清